Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Références : Grifone, Ladegaillerie, Debeaumarché 4, Rombaldi, Aebischer

I - Formes quadratiques réelles
1) Définitions, propriétés, représentation matricielle
2) Réduction et classification des formes quadratiques réelles
3) Application au calcul différentiel

II - Coniques dans un plan affine euclidien
1) Définition algébrique des coniques
2) Classification euclidienne et affine des coniques
3) Définition par directrice, foyer et excentricité

DEV 1 : Critère de Sylvester

DEV 2 : Par 5 points passe une conique

G! : Après avoir défini et classifié les formes quadratiques réelles, on s'intéresse aux coniques du plan qui ~~en~~ sont une interprétation géométrique et que l'on peut également classifier avec les formes quadratiques. Cela a ses applications en physique, notamment en mécanique pour étudier le mouvement des astres.

→ Penser à faire mention des figures.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Formes quadratiques réelles

1) Définitions, propriétés, représentation matricielle

[LAD 393] **DEF 1** : Soit $\varphi : E \times E \to K$. On dit que φ est une forme bilinéaire lorsque φ est linéaire en chacune de ces variables. On dit que φ est symétrique lorsque $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous $(x,y) \in E \times E$.

[LAD 393] **EX 2** : Un produit scalaire est bilinéaire symétrique

[LAD 393] **DEF 3** : La forme quadratique q associée à une forme bilinéaire φ est : $q : \begin{array}{l} E \to K \\ x \mapsto \varphi(x,x) \end{array}$

[LAD 393] **PROP 4** : Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. On dit que φ est la forme polaire de q. On a : $\forall x,y \in E^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$ et $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$.

[LAD 393] ♡ **PROP 5** : L'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Dans toute base $\mathcal{B}$ de E, on a : $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n^2} x_i x_j \cdot \varphi(e_i, e_j)$
q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées

[LAD 394] **DEF 6** : On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la matrice $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. De même, $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ où φ est la forme polaire de q. $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = {}^tXMY$.

[LAD 394] **PROP 7** : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = Pass_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Si $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPMP$. Deux telles matrices sont dites congruentes

[LAD 394] **DEF 8** : On appelle rang de φ (ou de q) le rang de sa matrice dans une ou toute base de E.

[LAD 394] **DEF 9** : φ (ou q) est dite non dégénérée lorsque son rang vaut n. Cela signifie que sa matrice est inversible.

[LAD 394] **DEF 10** : On dit que x et y sont orthogonaux pour φ lorsque $\varphi(x,y) = 0$. Pour $A \subset E$, on définit $A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi(x,y) = 0\}$.

PROP 11 : $A^{\perp}$, appelé orthogonal de A selon φ, est un sous-espace vectoriel de E. On a $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$ [LAD 394]

DEF 12 : On définit $\ker(\varphi) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\} = E^{\perp}$ [GRI 297]

PROP 13 : φ est non dégénérée si et seulement si $\ker(\varphi) = \{0\}$ [GRI 297]

DEF 14 : Pour $q \in Q(E)$, on définit le cône isotrope de q par $C(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$. On dit que q est définie lorsque $C(q) = \{0\}$ [LAD 395]

PROP 15 : $N(q) \subsetneq C(q)$ et $C(q)$ n'est pas un sous-espace vectoriel en général. [GRI 303]

EX 16 : Si $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, on a $C(q) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ et $N(q) = \{0\}$. [GRI 303]

2) Réduction et classification des formes quadratiques réelles

DEF 17 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On dit que $\mathcal{B}$ est q-orthogonale ($q \in Q(E)$) lorsque : $\forall i \neq j \in [\![1;n]\!]$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. [GRI 304]

PROP 18 : $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est q-orthogonale si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale [GRI 304]

THM 19 : Il existe une base $\mathcal{B}$ de E q-orthogonale pour tout $q \in Q(E)$. [LAD 395]

PROP 20 : Soit $q \in Q(E)$. Si on a $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2$ où $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^*, alors, la base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$ est q-orthogonale. De plus, $rg(q) = \#\{i \in [\![1;n]\!], \lambda_i \neq 0\}$ et $\ker(q) = \bigcap_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq 0}}^{n} \ker(f_i)$. [LAD 395]

REM 21 : Il est donc intéressant de décomposer q comme somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

MÉTHODE 22 : (Gauss) Illustrons la méthode par des exemples :

- Si q comporte des termes carrés :

$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

→ On considère un terme carré, disons x_1^2 [GRI 225]

→ on ordonne suivant x_1 : $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$

→ on utilise l'identité remarquable et on recommence avec x_2

$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$

$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.

· <u>Si q ne comporte que des termes rectangles :</u>

[GRI 306] $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$

→ on choisit un terme rectangle $\underset{(k\neq 0)}{k x_i x_j}$: $5x_1x_2$

→ on calcule q'_{x_i} et q'_{x_j} : $q'_{x_1} = 5x_2 + 6x_3$; $q'_{x_2} = 5x_1 + 3x_2$

→ on écrit $\frac{1}{k} q'_{x_i} q'_{x_j}$ + termes correctifs : $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2+6x_3)(5x_1+3x_3) - \frac{18}{5}x_3^2$

→ on utilise : $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}[(\varphi_1+\varphi_2)^2 - (\varphi_1-\varphi_2)^2]$:

$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_1+5x_2+9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1+5x_2+3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$$

[GRI 313] **THM 23**. On suppose $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ euclidien, soit $q \in Q(E)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et q-orthogonale.

[GRI 302] **DEF 24** : Soit $q \in Q(E)$. On dit que q est (définie) positive lorsque $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$ ($q(x) > 0$). On définit de même q (définie) négative.

♡ **COR 25** : Soient $q, q' \in Q(E)$. On suppose q' définie positive. Il existe $\mathcal{B}$ une base de E qui soit q-orthogonale et q'-orthonormée.

♡ **COR 26** : Soient $M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose M définie positive. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$.

♡ **DEF 27** : Soit $q \in Q(E)$. On définit la signature de q par le couple (s,t) suivant : $s = \max\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ q_{|F} > 0}} (\dim(F))$; $t = \max\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ q_{|F} < 0}} (\dim(F))$.

[LAD 396] **DEF 28** Deux formes quadratiques $q, q' \in Q(E)$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $u \in GL(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $q'(x) = q(u^{-1}(x))$

[LAD 396] **PROP 29** : Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si leurs matrices sont congruentes.

REM 30 : Classifier les formes quadratiques revient à déterminer leurs orbites sous l'action de congruence matricielle.

THM 31 : (Inertie de Sylvester) Soit $q \in Q(E)$ de signature

[GRI 309] (s,t). Il existe $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E telle que

ou $\forall x \in E$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2$. Autrement dit,

[LAD 392] $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_s & & (0) \\ & -I_t & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$ De plus, $rg(q) = s+t$.

PROP 32 : Si $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i^2$ où $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^*, $s = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i > 0\}$ et $t = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i < 0\}$.

COR 33 : Deux formes quadratiques réelles sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature

EX 34 : Soit $q : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ [GRI 310]

Alors $s = 2$, $t = 1$ donc $rg(q) = 3$

DEV 1

PROP 35 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$. De plus, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ [ROM 436]

THM 36 (Sylvester) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs [ROM 475]

3) Application au calcul différentiel

U ouvert de $\mathbb{R}^n$

DEF 37 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Sa différentielle seconde en $a \in U$ est bilinéaire notée $d^2f(a)$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est appelé matrice Hessienne de f en a notée $H_f(a)$. [ROU 283]

THM 38 : (Schwarz) $d^2f(a)$ est symétrique, et donc $H_f(a)$ également. [ROU 384]

THM 39 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

1) Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors $df(a) = 0$ [ROU 360-361]

2) Si $df(a) = 0$ et $d^2f(a)$ est définie positive (resp. négative) alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict en a.

II - Coniques dans un plan affine euclidien

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction $\vec{\mathcal{P}}$. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$. On écrit $M(x,y)$ pour signifier $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Pour $A, B \in \mathcal{P}$, on note $d(A,B) = AB = \|\vec{AB}\|$ [ROM 493]

1) Définition algébrique des coniques

DEF 40 : Une conique dans $\mathcal{P}$ est une courbe algébrique $\mathcal{C}$ de degré 2 où $\mathcal{C} = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$. On dit que c'est une conique propre lorsque le polynôme est irréductible [ROM 493]

EX 41 : Si $\mathcal{C}$ n'est pas propre, c'est la réunion de deux droites [ROM 494]

· On peut voir $\mathcal{C}$ comme l'intersection d'une conique et d'un plan.

REM 42 : On notera le polynôme $F(M) = Q(\vec{OM}) + L_0(\vec{OM}) + C_0$ où Q est une forme quadratique ; L_0 une forme linéaire, C_0 une constante. Son équation s'écrit [DEB 328]

$$(x \; y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d \; e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

[DFB 329] **REM 43**: Si on change l'origine O en Ω, l'équation de la conique devient : $Q(\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})+L_0(\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})+C_0=0$
i.e $Q(\overrightarrow{\Omega M})+2B(\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{\Omega M})+L_0(\overrightarrow{\Omega M})+F(\Omega)=0$
Q reste donc inchangée, c'est pour cela qu'on ne l'indexe pas.

[DFB 329] **DEF 44**: On dit que $\mathcal{C}$ est de rang r lorsque Q est de rang r. $\mathcal{C}$ est dite non dégénérée lorsque Q est non dégénérée.

[DFB 329] **DEF 45**: On appelle centre de $\mathcal{C}$ tout point Ω tel que $L_\Omega=0$ i.e l'équation de $\mathcal{C}$ est : $F(M)=Q(\overrightarrow{\Omega M})+C_\Omega=0$. On dit que $\mathcal{C}$ est à centre lorsqu'un tel point existe et est unique.

[DFB 329] **REM 46**: Tout centre de $\mathcal{C}$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

[DFB 330] **THM 47**: On obtient les centres de $\mathcal{C}$ en annulant les dérivées partielles de F. $\mathcal{C}$ est ~~est~~ à centre si et seulement si $\mathcal{C}$ est non dégénérée.

DEV 2

([EID] ↓ voir Agreg maths) **THM 48**. Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan.
1) Il existe une conique passant par les 5 points
2) La conique est unique si et seulement si 4 des points ne sont pas alignés
3) La conique est non dégénérée si et seulement si 3 des points ne sont pas alignés.

2) Classification euclidienne et affine des coniques

L'origine étant choisie, on cherche un repère adéquat dans lequel l'équation de la conique est réduite.

[AEB 147] **PROP 49**: Soit $\mathcal{C}$ une conique propre, λ_1,λ_2 les valeurs propres réelles de la matrice associée à Q.
→ Si $\lambda_1\lambda_2>0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$.
→ Si $\lambda_1\lambda_2<0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{A^2}-\frac{Y^2}{B^2}=1$
→ Si $\lambda_1\lambda_2=0$, $\mathcal{C}$ est une parabole d'équation réduite $Y^2=2pX$
avec $A,B>0$, $p\neq 0$.

[AEB 140] **PROP 50**: Soit $\mathcal{C}$ une conique de signature (s,t). Alors :
- Si $(s,t)=(2,0)$ et $F(\Omega)>0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse d'équation $X^2+Y^2=1$
- Si $(s,t)=(2,0)$ et $F(\Omega)<0$, $\mathcal{C}=\emptyset$
- Si $(s,t)=(2,0)$ et $F(\Omega)=0$, $\mathcal{C}$ est un point
- Si $(s,t)=(1,1)$ et $F(\Omega)\neq 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole d'équation $X^2-Y^2=1$
- Si $(s,t)=(1,1)$ et $F(\Omega)=0$, $\mathcal{C}$ est réunion de deux droites sécantes
- Si $(s,t)=(1,0)$, alors $F(x,y)=l_1(x,y)^2+l(x,y)+C$
  . Si $l=\lambda l_1$, l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2+\lambda X+f=0$, et $\mathcal{C}$ est soit réunion de deux droites parallèles, soit une droite, soit vide
  . Sinon, l'équation de $\mathcal{C}$ est $X^2=Y$ et c'est une parabole.

REM 51: PROP 49 et 50 sont respectivement les classifications euclidienne et affine des coniques. Il s'agit des orbites possibles de $\mathcal{C}$ sous l'action de $Is(P)$ dans PROP 49 et de $GA(P)$ dans PROP 50. Voir [CAL]

REM 52: Le produit $\lambda_1\lambda_2$ dans PROP 49 s'obtient en calculant le discriminant de ax^2+bx+c.

PROP 53: . L'ellipse peut être paramétrée par $x=A\cos(t)$, $y=B\sin(t)$ pour $t\in[0;2\pi[$.
. L'hyperbole peut être paramétrée par $x=\pm A\,ch(t)$, $y=B\,sh(t)$, $(t\in\mathbb{R})$ [RAT 501 502]
. La parabole $y^2=2px$ admet la représentation paramétrique $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$ $(t\in\mathbb{R})$

3) Définition par directrice, foyers et excentricité

Soit $\mathcal{D}$ une droite de P, $F\notin\mathcal{D}$, $e>0$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C}=\{M\in P \mid \frac{MF}{d(M,\mathcal{D})}=e\}$. On se place dans $\mathcal{R}=(F,e_1,e_2)$ où e_2 dirige $\mathcal{D}$. Soit $\Delta=F+Vect(e_1)$ la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F et par K projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$. [RAT 505]

LEMME 54: . Si $e=1$, $C\cap\Delta=\{A\}$ où A est le milieu de [FK] [RAT 505]
. Si $e\neq 1$, $C\cap\Delta=\{A,A'\}$ où $A\left(\frac{ke}{1+e},0\right)$ et $A'\left(-\frac{ke}{1-e},0\right)$
où $k>0$ est tel que $\mathcal{D}: x_1=k$. → voir ANNEXE.

THM 55. $\mathcal{C}$ est une conique non dégénérée. Pour $e=1$, c'est une parabole, pour $e<1$ c'est une ellipse, pour $e>1$, c'est une hyperbole. [RAT 506]

DEF 56. $\mathcal{D}$ est la directrice, Δ est l'axe focal, F est le foyer et e est l'excentricité de $\mathcal{C}$. On définit F' le symétrique de F par rapport au centre de la conique. [RAT 506]

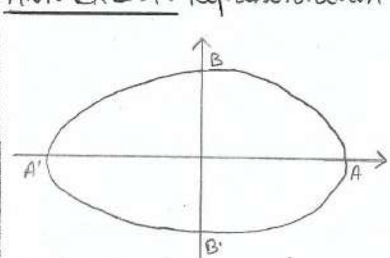
THM 57: La tangente en M à une parabole est la médiatrice de [HF] où H est le projeté orthogonal sur M sur $\mathcal{D}$. [RAT 512]

THM 58: La tangente en M d'une ellipse (resp. hyperbole) est bissectrice extérieure (resp. intérieure) de l'angle en M de FMF'. [LAD 445]

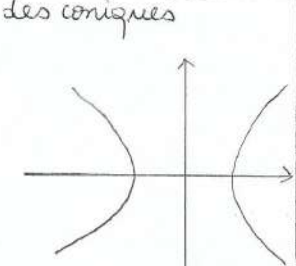
THM 59: L'ellipse de centre O d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ est la transformée du cercle $\mathcal{C}(O,a)$ par l'affinité orthogonale d'axe Ox de rapport $\frac{b}{a}$, ou celle du cercle $\mathcal{C}(O,b)$ par l'affinité orthogonale d'axe Oy de rapport $\frac{a}{b}$. [LAD 455]

APPLI 60: L'aire du domaine délimité par une ellipse de demi-axes a et b est πab [LAD 456]

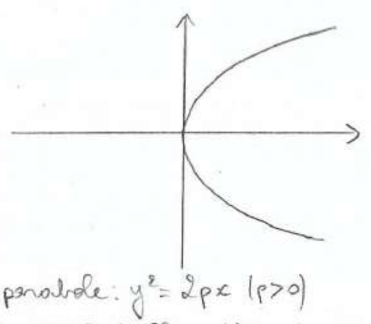
ANNEXE 1 : Représentation des coniques



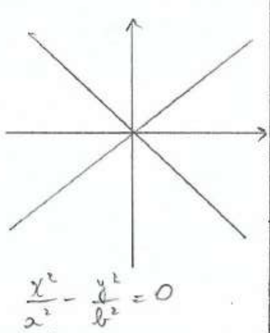
ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



parabole : $y^2 = 2px$ $(p>0)$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

ANNEXE 2 : Plan d'étude d'une conique

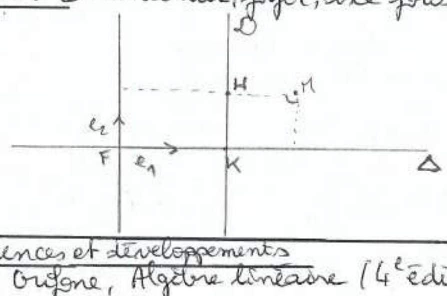
2)a) Déterminer le type euclidien

- On calcule det(A) où $A = \mathrm{Mat}_B(Q)$
- Si $\Delta > 0$, c'est une ellipse, si $\Delta < 0$, c'est une hyperbole. C'est une conique à centre dont on obtient les coordonnées en résolvant $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ On place alors l'origine en ce point et on diagonalise A pour avoir les axes de la conique (vecteurs propres)
- Si $\Delta = 0$, c'est une parabole. On diagonalise A en BON pour obtenir les axes. On fait un changement d'origine pour réduire l'équation sous la forme $Y^2 = 2pX$ si possible

2)b) Déterminer le type affine

- On décompose Q en carrés (Gauss)
- On détermine le type de la conique à l'aide de la signature (ellipse si (2,0), hyperbole si (1,1), parabole si (1,0))
- On trouve le centre de la même manière et on place l'origine en ce point et on change le repère grâce à la mise en carrés de q
- Dans le cas d'une parabole, on change le repère à l'aide de la mise en carrés de q. Puis, on change l'origine pour regrouper les termes non carrés

ANNEXE 3 : Directrice, foyer, axe focal



Références et développements

[GRI] Grifone, Algèbre linéaire (4e édition)

[LAD] Ladegaillerie, Géométrie affine, ...

[ROM] Rombaldi, Algèbre-géométrie

[DEB] Debeaumarché, Manuel de mathématiques vol 4

[AEB] Aebischer, Géométrie

[EID] Eiden (mais aller voir sur Agreg Maths pour ce dev)

DEV 1 : Critère de Sylvester → 157 ; 170 ; 171

DEV 2 : Par 5 points passe une conique → 171, 181, 191